7.4.11 Výpočty vzdáleností III

Předpoklady: 7409

Pedagogická poznámka: Hodina sice obsahuje pouze dva příklady, ale pokud se Vám podaří spočítat jen ten první oběma metodami, bude to úspěch. Společně si vysvětlíme postup a potom nechávám studenty počítat samostatně. Kontrolujeme si výsledky v etapách. Ještě před začátkem výpočtů si domluvíme, jaká písmena budeme používat u které přímky pro označení parametrů, aby byly kontroly jednodušší. U druhého postupu si nadiktujeme jeho pět bodů a pak je studenti počítají.

Př. 1: Urči vzdálenost mimoběžných přímek $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$, $A[-2;0;1]$, $\boldsymbol{u}=(3;-2;2)$, $B[-1;2;-2]$, $\boldsymbol{v}=(-2;1;-2)$.

Vzdálenost mimoběžek = délka příčky (úsečky, která je na obě přímky kolmá a její krajní body na nich leží) = nejkratší možná délka.
Problém (Podobný jako u vzdálenosti bodu od přímky): Máme sice směr, ale nevíme, kde máme na přímkách začít $\Rightarrow$ podobné řešení: Budeme se tvářit, že známe souřadnice obou krajních bodů příčky a pomocí podmínek, které musí příčka splňovat, najdeme hodnoty parametrů, které k vyjádření bodů použijeme.
Krajní body tětivy: $P[-2+3t;-2t;1+2t]$ (leží na přímce *p*),
$Q[-1-2s;2+s;-2-2s]$ (leží na přímce *q*).
Vektor $Q-P=((-1-2s)-(-2+3t);(2+s)-(-2t);(-2-2s)-(1+2t))$
$Q-P=(1-2s-3t;2+s+2t;-3-2s-2t)$
Vektor $Q-P$ je kolmý na přímku *p* (a tedy na vektor $\boldsymbol{u}=(3;-2;2)$).
$(Q-P)\cdot\boldsymbol{u}=0$
$(1-2s-3t;2+s+2t;-3-2s-2t)(3;-2;2)=0$
$3(1-2s-3t)-2(2+s+2t)+2(-3-2s-2t)=0$
$3-6s-9t-4-2s-4t-6-4s-4t=0$
$12s+17t=-7$

Vektor $Q-P$ je kolmý na přímku *q* (a tedy na vektor $\boldsymbol{v}=(-2;1;-2)$).
$(Q-P)\cdot\boldsymbol{v}=0$
$(1-2s-3t;2+s+2t;-3-2s-2t)(-2;1;-2)=0$
$-2(1-2s-3t)+1(2+s+2t)-2(-3-2s-2t)=0$
$-2+4s+6t+2+s+2t+6+4s+4t=0$
$9s+12t=-6$
Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:
$12s+17t=-7$
$\underline{9s+12t=-6}$

$$\begin{array}{ll} & 12s+17t=-7 \\ 3[\![1]\!]-4[\![2]\!] & 3t=3 \\ \hline t=1 & \end{array}$$

Dopočítáme s: $9s+12\cdot 1=-6$.

$9s=-18 \Rightarrow s=-2$

Dopočítáme souřadnice bodů P a Q.

$P[-2+3t;-2t;1+2t] \;\Rightarrow\; P[-2+3\cdot 1;-2\cdot 1;1+2] \;\Rightarrow\; P[1;-2;3]$

$Q[-1-2s;2+s;-2-2s] \;\Rightarrow\; Q[-1-2(-2);2+(-2);-2-2(-2)] \;\Rightarrow\; Q[3;0;2]$

Určíme vzdálenost $|PQ|$:

$|PQ|=\sqrt{(3-1)^2+(0-[-2])^2+(2-3)^2}=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$

Jiná možnost, jak najít body *P* a *Q*.

Příčka je kolmá na obě přímky $\Rightarrow$ **směr příčky** můžeme určit jako vektorový součin směrů obou přímek:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{u}=(3;-2;2)3;-2 \\ \boldsymbol{v}=(-2;1;-2)-2;1 \end{array} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{w}=(4-2;-4+6;3-4)=(2;2;-1)$$

Bod Q určitě leží v rovině, která obsahuje přímku p a směr příčky $\boldsymbol{w}$ (leží v ní celá příčka) $\Rightarrow$ **rovina, ve které leží příčka**.

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{u}=(3;-2;2)3;-2 \\ \boldsymbol{w}=(2;2;-1)2;2 \end{array} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n}=(2-4;4+3;6+4)=(-2;7;10)$$

Rovnice roviny: $-2x+7y+10z+d=0$

Dosadíme bod $A[-2;0;1]$: $-2(-2)+7\cdot 0+10\cdot 1+d=0 \Rightarrow d=-14$

Rovina obsahující příčku: $-2x+7y+10z-14=0$

Hledáme **průsečík roviny s přímkou *q* (bod *Q*)**:

Soustava rovnic:

$$\begin{array}{l} -2x+7y+10z-14=0 \\ x=-1-2s \\ y=2+s \\ z=-2-2s \end{array}$$

$-2(-1-2s)+7(2+s)+10(-2-2s)-14=0$

$2+4s+14+7s-20-20s-14=0$

$-18=9s$

$s=-2$

$Q[-1-2s;2+s;-2-2s] \;\Rightarrow\; Q[-1-2(-2);2+(-2);-2-2(-2)] \;\Rightarrow\; Q[3;0;2]$

Bod P je možné určit mnoha způsoby. Například:

Známe přímku na které leží příčka: $r(Q;\boldsymbol{w})$ $\Rightarrow$ najdeme **průsečík příčky s přímkou *p***:

$$p:\ \begin{array}{l} x=-2+3t \\ y=-2t \\ z=1+2t, t\in R \end{array} \qquad r:\ \begin{array}{l} x=3+2s \\ y=2s \\ z=2-s, s\in R \end{array}$$

Soustava rovnic:

$-2+3t=3+2s$

$-2t=2s \quad \Rightarrow$ Z druhé rovnice $s=-t$ dosadíme do zbývajících dvou.

$1+2t=2-s$

$$\begin{aligned} -2+3t&=3+2(-t) \\ 1+2t&=2-(-t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t&=1 \\ t&=1 \end{aligned}$$

Průsečík (bod P) existuje $\Rightarrow$ dopočítáme jeho souřadnice:

$P[-2+3t;-2t;1+2t] \Rightarrow P[-2+3\cdot 1;-2\cdot 1;1+2] \Rightarrow P[1;-2;3]$

Určíme vzdálenost $|PQ|$:

$$|PQ|=\sqrt{(3-1)^2+(0-[-2])^2+(2-3)^2}=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$$

Ještě jiná (nejrychlejší a nejjednodušší) možnost, jak vzdálenost mimoběžek určit (od M. Poláka z 4.4. 2023)

Jednou z přímek (například přímkou *p*) proložíme rovinu ρ, která je s rovnoběžná s přímkou *q*. Vzdálenost přímky *q* (tedy jejího libovolného bodu, například bodu *B*) od této roviny je i vzdáleností obou mimoběžek.

Pomocná rovina ρ prochází přímkou *p* a je rovnoběžná s přímkou *q* $\Rightarrow$ její normálový vektor můžeme určit jako vektorový součin směrů obou přímek:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}&=(3;-2;2)\,3;-2 \\ \boldsymbol{v}&=(-2;1;-2)\,-2;1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}=(4-2;-4+6;3-4)=(2;2;-1) \Rightarrow \text{rovnice roviny:}$$

$2x+2y-z+d=0$.

Rovina prochází přímkou *p*, tedy i bodem *A*: $2\cdot(-2)+2\cdot 0-1\cdot 1+d=0 \Rightarrow d=5$.

Hledáme vzdálenost přímky *q* (například bodu *B*) od roviny ρ:

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2\cdot(-1)+2\cdot 2-(2)+5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|9|}{3}=3$$

Příčky *p* a *q* mají vzdálenost 3.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je na středoškolské poměry nezvykle početně náročný. Jde o důsledek faktu, že při vymýšlení příkladu jsem neuvažoval druhé řešení, které je na rozdíl od řešení připraveného podstatně složitější. Přesto jsem příklad nakonec nechal jako ukázku toho, že i poměrně komplikovaný výpočet může vést k poměrně jednoduchému výsledku. Jako opravdový bonus pro ty nejlepší pak může sloužit úkol vymyslet příklad, který by měl obě řešení stejně jednoduchá.

Př. 2: Na přímce $q:\{[-1+s;-8+3s;5-2s], s\in R\}$ najdi bod *Q*, který je od přímky $p:\{[3t;4+2t;-3-2t], t\in R\}$ vzdálen 6. Kolik řešení může mít tento příklad?

Množina bodů, které mají od přímky *p* vzdálenost 6 tvoří plášť válce, který má v přímce *p* osu a jehož poloměr je 6. Přímka *q* se s ním může protnout v žádném, jednom, nebo ve dvou bodech.

Tento příklad už jsme řešili minulou hodinu, jenže jsme přímo znali souřadnice bodu a zjišťovali jeho vzdálenost od přímky. Teď vzdálenost známe a musíme zjistit, kde bod leží.
$\Rightarrow$ zopakujeme postup a souřadnice bodu budeme psát pomocí parametru.
$Q[-1+s;-8+3s;5-2s]$
Bodem Q vedeme rovinu ρ kolmou na přímku p:
$\boldsymbol{u}_p=(3;2;-2)=\boldsymbol{n}_\rho$
Rovnice roviny: $3x+2y-2z+d=0$.
Rovina prochází bodem Q: $3(-1+s)+2(-8+3s)-2(5-2s)+d=0$
$d=29-13s$
Rovina $\rho: 3x+2y-2z+29-13s=0$
Hledáme bod P = průsečík roviny ρ s přímkou $p:\{[3t;4+2t;-3-2t],t\in R\}$:

$$3x+2y-2z+29-13s=0$$
$$x=3t$$
$$y=4+2t$$
$$z=-3-2t,t\in R$$

Dosadíme do rovnice roviny: $3(3t)+2(4+2t)-2(-3-2t)+29-13s=0$
V rovnici máme dvě neznámé, vyjádříme si t (s se zbavíme až na konec):
$9t+8+4t+6+2t+29-13s=0$
$17t+43-13s=0$
$$t=\frac{13s-43}{17}$$
Teď známe souřadnice bodu P: $P\left[3\cdot\frac{13s-43}{17};4+2\cdot\frac{13s-43}{17};-3-2\cdot\frac{13s-43}{17}\right]$.
Upravíme do lepšího tvaru $P\left[\frac{39s-129}{17};\frac{26s-18}{17};\frac{35-26s}{17}\right]$.
Vektor $Q-P=[-1+s;-8+3s;5-2s]-\left[\frac{39s-129}{17};\frac{26s-18}{17};\frac{35-26s}{17}\right]$
$$Q-P=\left(\frac{112-22s}{17};\frac{25s-118}{17};\frac{50-8s}{17}\right)$$
Velikost vektoru $Q-P$ je vzdáleností bodu Q od přímky p (kterou známe) $\Rightarrow$ dosadíme a určíme hodnotu parametru s:
$$|Q-P|=\sqrt{\left(\frac{112-22s}{17}\right)^2+\left(\frac{25s-118}{17}\right)^2+\left(\frac{50-8s}{17}\right)^2}=6 \quad /^2$$
$$\left(\frac{112-22s}{17}\right)^2+\left(\frac{25s-118}{17}\right)^2+\left(\frac{50-8s}{17}\right)^2=36 \qquad /\cdot 17^2$$
$$(112-22s)^2+(25s-118)^2+(50-8s)^2=10404$$
$$12544-4928s+484s^2+625s^2-5900s+13924+2500-800s+64s^2=10404$$
$$1173s^2-11628s+18564=0 \qquad /:(3\cdot 17)$$
$$23s^2-228s+364=0$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-228) \pm \sqrt{(-228)^2 - 4 \cdot 23 \cdot 364}}{2 \cdot 23} = \frac{228 \pm 136}{46}$$

$s_1 = \frac{228+136}{46} = \frac{182}{23}$ $\qquad$ $s_2 = \frac{228-136}{46} = 2$

Dopočítáme body $Q[-1+s;-8+3s;5-2s]$:

$$Q_1\left[-1+\frac{182}{23};-8+3\cdot\frac{182}{23};5-2\cdot\frac{182}{23}\right] \Rightarrow Q_1\left[\frac{160}{23};\frac{362}{23};-\frac{249}{23}\right]$$

$$Q_2[-1+2;-8+3\cdot 2;5-2\cdot 2] \Rightarrow Q_2[1;-2;1]$$

Př. 3: Petáková:
strana 120/cvičení 73 b)
strana 121/cvičení 77
strana 122/cvičení 90
strana 122/cvičení 94

Shrnutí: